so wird nach (9)

$$\frac{d\chi(x,\sigma)}{dx_\nu} = e^{iU(\sigma)} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_\nu} e^{-iU(\sigma)} - i \int_\sigma d\sigma_\nu' \left[\varphi(x), \frac{\partial U(\sigma)}{\partial\sigma(x')}\right],$$

wo das Flächenintegral nach (16) und (7) verschwindet, und

$$\frac{d^2\chi(x,\sigma)}{dx_\nu^2} = e^{iU(\sigma)} \frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_\nu^2} e^{-iU(\sigma)} - i \int_\sigma d\sigma_\nu' \left[\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_\nu}, \frac{\partial U(\sigma)}{\partial\sigma(x')}\right],$$

woraus mit Hilfe von (6) und (7) wie früher (vgl. Abschn. 2) folgt:

$$\frac{d^2\chi(x,\sigma)}{dx_\nu^2} = (\mu^2+\gamma)\,\chi(x,\sigma),$$

entsprechend der Ruhmasse $\sqrt{\mu^2+\gamma}\,\hbar/c$.

Anstatt den gemäß (15) transformierten Operator χ einzuführen, kann man natürlich auch φ beibehalten und die Schrödinger-Gleichung entsprechend transformieren. Setzen wir nämlich in (10), (11), (12)

$$S(\sigma) = e^{iU(\sigma)},$$

so daß

$$\Psi^*(\sigma)\,\chi(x,\sigma)\,\Psi(\sigma) = \Psi'^*(\sigma)\,\varphi(x)\,\Psi'(\sigma),$$

so wird

$$\boldsymbol{H}'(x,\sigma) = -i\hbar c\, S^{-1}(\sigma)\frac{\partial S(\sigma)}{\partial\sigma(x)} = \hbar c \frac{\partial U(\sigma)}{\partial\sigma(x)} + \dots = 1/2\cdot\gamma\,\varphi^2(x) + \dots,$$

und unter Verwendung dieser Hamilton-Funktion (statt $\boldsymbol{H}$) in (5) folgt wie oben

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx_\nu^2} = (\mu^2+\gamma)\,\varphi(x).$$

Daß diese Betrachtungen auf Teilchen mit Spin übertragen werden können, bedarf wohl keiner Erläuterung.

Bemerkungen zum Turbulenzproblem

Von Werner Heisenberg

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. **3a**, 434—437 [1948]; eingegangen am 15. Juni 1948)

Die verschiedenen physikalischen Gesichtspunkte, die einerseits den früheren Stabilitätsuntersuchungen an laminaren Strömungen, andererseits der neueren statistischen Turbulenztheorie zugrunde liegen, werden miteinander verglichen und kritisch besprochen.

In früheren Jahren hat Sommerfeld mit seinen Schülern häufig das Turbulenzproblem diskutiert, das lange Zeit als das ungelöste Grundproblem der neueren Hydrodynamik galt. Inzwischen hat die statistische Theorie der Turbulenz, die vor etwa zehn Jahren von Taylor[1] und v. Kármán[2] begründet worden ist, so entscheidende Fortschritte ermöglicht, daß das Turbulenzproblem in seinem physikalischen Kern wohl als gelöst angesehen werden kann. In den folgenden Zeilen sollen verschiedene physikalische Gesichtspunkte, die im Laufe der Zeit auf das Turbulenzproblem angewandt worden sind, noch einmal kritisch erörtert werden.

Vor etwa vierzig Jahren wurde von Sommerfeld[3] zunächst die Frage behandelt: Woher kommt es, daß gewisse laminare Bewegungen, die bis zu beliebigen Geschwindigkeiten Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen sind, von bestimmten Werten der Reynoldsschen Zahl ab instabil werden? Diese Fragestellung ging von der Auffassung aus, daß in einer reibungslosen Flüssigkeit alle die laminaren Bewegungen auftreten könnten, die man aus der klassischen Hydrodynamik kennt, daß aber offenbar die Rei-

[1] G. J. Taylor, Proc. Roy. Soc. [London] Ser. A **151**, 421 [1935].

[2] Th. v. Kármán u. L. Howarth, Proc. Roy. Soc. [London] Ser. A **164**, 192 [1938].

[3] A. Sommerfeld, Int. Math. Kongr. Rom 1908, Vol. III, S. 116.

bung diese Bewegungen unter gewissen Voraussetzungen instabil macht. Die Annahme, daß der Übergang von der laminaren in die turbulente Strömungsform erst durch die Reibung zustande kommt, wurde etwa durch die Helmholtzschen Wirbelsätze begründet. Eine turbulente Bewegung ist ja eine Bewegung, in der überall in der Flüssigkeit größere und kleinere Wirbel verteilt sind. Eine solche Bewegung kann in einer reibungsfreien Flüssigkeit nicht entstehen, wenn nicht schon von Anfang an in weiten Bereichen Wirbelung vorhanden ist.

Die Stabilitätsuntersuchungen der folgenden Jahre ergaben für einige laminare Strömungen Stabilität[4], für bestimmte Klassen von Strömungen aber in der Tat von hinreichend hohen Reynoldsschen Zahlen ab Instabilität[5]. Die Art, wie bei wachsender Reynoldsscher Zahl neue Lösungstypen und damit Instabilitäten der Ausgangslösung entstehen können, ist später von Burgers[6] an einem vereinfachten mathematischen Modell studiert worden.

Die neuere statistische Theorie der Turbulenz geht demgegenüber von einer ganz anderen Fragestellung aus. Sie interessiert sich für die voll ausgebildete Turbulenz. Die Flüssigkeit ist ein mechanisches System von außerordentlich vielen Freiheitsgraden. Da es von vornherein viel wahrscheinlicher ist, daß die Energie irgendwie über alle Freiheitsgrade verteilt ist, als speziell auf eine bestimmte laminare Bewegungsform, wird, ähnlich wie in der statistischen Mechanik, nach den allgemeinen Eigenschaften solcher Verteilungen gefragt werden müssen. Offenbar ist es bei einem System von so vielen Freiheitsgraden von vornherein zwecklos, die feinsten Details des Strömungszustandes untersuchen zu wollen, da der Zustand dauernd wechselt und die Einzelheiten praktisch unwichtig sind. Man muß vielmehr zunächst festlegen, für welche Eigenschaften einer turbulenten Strömung man sich noch interessieren will. Hier wird zweckmäßig die gleiche Frage gestellt wie in der Optik der kontinuierlichen Spektren. Ebenso wie man bei einem kontinuierlichen Spektrum elektromagnetischer Wellen im allgemeinen nur nach der Verteilung der Energie über die verschiedenen Wellenlängen fragt. nicht aber nach den Phasenbeziehungen, so denkt man sich auch die Geschwindigkeit in der turbulenten Strömung als Funktion des Ortes in eine Fourier-Reihe entwickelt und bezeichnet etwa mit $\varrho F(k) dk$ die Energie (ϱ = Massendichte), die zwischen den Wellenzahlen k und $k + dk$ in der Volumeneinheit vorhanden ist. Man fragt also nach der Gestalt der Verteilung $F(k)$, d. h. nach dem „Spektrum" der Turbulenz, verzichtet aber auf die Kenntnis der Phasenbeziehungen, die ja doch dauernd wechseln. Auch die statistischen Korrelationen zwischen den Geschwindigkeiten an zwei verschiedenen Punkten in der Flüssigkeit sind im wesentlichen durch das Spektrum festgelegt.

Ähnlich wie es in der Optik nun eine bestimmte Verteilung gibt, die im thermodynamischen Gleichgewicht stets auftritt, nämlich die Plancksche Strahlungsverteilung, so muß es auch eine bestimmte Gleichgewichtsverteilung der Energie auf die Wirbel verschiedener Größe geben. Eine solche Gleichgewichtsverteilung kann z. B. praktisch dadurch erreicht werden, daß man die Flüssigkeit dauernd umrührt. Zwar wird dann bei den größten Wirbeln keine statistische Verteilung eintreten, da ihre Form und Geschwindigkeit durch die Art des Rührens bestimmt wird. Aber die großen Wirbel erzeugen kleinere oder lösen sich in solche auf, und für kürzere Wellenlängen wird sich schnell ein stationärer Betrieb einstellen, bei dem Energie stets von größeren in kleinere Wirbel transportiert und schließlich durch Reibung in Wärme verwandelt wird.

Das Spektrum dieser Gleichgewichtsverteilung ist im Grenzfall sehr hoher Reynoldsscher Zahlen unabhängig durch Kolmogoroff[7], Onsager[8] und v. Weizsäcker[9] abgeleitet worden; eine Untersuchung von Prandtl[10] enthält ebenfalls die dieser Ableitung zugrunde liegenden

[4] L. Hopf, Ann. Physik **43**, 1 [1914]; F. Noether, Z. angew. Math. Mechan. **6**, 232 [1926]; Th. Sexl, Ann. Physik **83**, 835 [1927]; **84**, 807 [1927]; **87**, 570 [1928].

[5] W. Heisenberg, Ann. Physik **74**, 577 [1924]; W. Tollmien, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen math.-physik. Kl. **1929**; N. Schlichting, Ann. Physik **14**, 905 [1932]. Neuerdings ist das Stabilitätsproblem nochmals zusammenfassend behandelt worden von C. C. Lin, Proc. Nat. Acad. Sci. USA. **30**, 316 [1944] und Quart. J. appl. Math. **3**, 117, 218, 277 [1945—1946].

[6] J. M. Burgers, Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **17**, 1 [1939].

[7] A. N. Kolmogoroff, C. R. [Doklady] Akad. Sci. URSS. **30**, 301 [1941]; **32**, 16 [1941].

[8] L. Onsager, Physic. Rev. **68**, 286 [1945].

[9] C. F. v. Weizsäcker, Z. Physik **124**, 614 [1942].

[10] H. Prandtl, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen math.-physik. Kl. **1945**, S. 6.

Ähnlichkeitsbetrachtungen; die Fortsetzung des Spektrums in das Gebiet der kleinsten Wirbel (deren Reynolds-Zahlen nicht mehr als groß gelten können) wurde vom Verfasser berechnet[11].

Diese Berechnungen beruhen auf einem Gleichgewichtsansatz, der formal und physikalisch als Analogon zum Boltzmannschen Stoßzahlansatz aufgefaßt werden kann. Man fragt nämlich nach der Energiemenge S_k, die pro Zeiteinheit aus dem Wellenzahlgebiet zwischen 0 und k in das Gebiet größerer Wellenzahlen (also kleinerer Wirbel) transportiert wird. Dieser Transport geschieht durch die Reibung. Dabei tritt jedoch gleichberechtigt neben die gewöhnliche Viskosität der Flüssigkeit noch die turbulente Viskosität, also die Übertragung von Impuls durch die kleineren turbulenten Wirbelbewegungen; denn diese kleinen unregelmäßigen Bewegungen übertragen bei Vorhandensein eines mittleren Geschwindigkeitsgradienten in ähnlicher Weise Impuls wie die molekularen Bewegungen und führen daher ebenso zu einer Art von Zähigkeit. Man kann diese turbulente Zähigkeit der Größenordnung nach gleich $\varrho\, l_k v_k$ setzen, wobei l_k den Prandtlschen Mischungsweg, v_k die Geschwindigkeit der hierfür in Betracht kommenden Wirbel von der Wellenzahl k darstellt. Drückt man die turbulente Zähigkeit durch das Spektrum $F(k)$ für alle Wellenzahlen zwischen k und ∞ aus, so erhält man aus Dimensionsbetrachtungen als einfachsten Ansatz für die turbulente Zähigkeit:

$$\varkappa\,\varrho \int_k^\infty \sqrt{\frac{F(k')}{k'^3}}\, dk', \tag{1}$$

wobei $\varkappa$ eine dimensionslose Zahl ist, die empirisch etwa den Wert 0,8 hat. Bedeutet μ die molekulare Zähigkeit, so wird schließlich unter Anwendung bekannter Formeln der Hydrodynamik:

$$S_k = \left(\mu + \varkappa\,\varrho \int_k^\infty \sqrt{\frac{F(k')}{k'^3}}\, dk'\right) \int_0^k 2\,F(k'')\,k''^2\,dk''. \tag{2}$$

Beim stationären Betrieb muß S_k für größere k von k unabhängig sein, wenn die Energiezufuhr bei kleinen k-Werten (d. h. durch große Wirbel) erfolgt. Aus dieser Bedingung ergibt sich die Gestalt des Spektrums, nämlich $F(k) \sim k^{-5/3}$ für Wirbel mit großen Reynoldsschen Zahlen, $F(k) \sim k^{-7}$ für Wirbel mit kleinen Reynoldsschen Zahlen, d. h. für das kurzwellige Ende des Spektrums[11]. Auch nichtstationäre Vorgänge, wie z. B. das zeitliche Abklingen einer turbulenten Bewegung, können nach Gl. (2) diskutiert werden, wenn es sich um eine voll ausgebildete turbulente Bewegung handelt. Wenn keinerlei Energie von außen zugeführt wird, so folgt ja aus (2) sofort

$$\frac{d}{dt}\left[\varrho \int_0^k F(k')\,dk'\right] = -\left(\mu + \varkappa\,\varrho \int_k^\infty \sqrt{\frac{F(k')}{k'^3}}\, dk'\right) \int_0^k 2\,F(k'')\,k''^2\,dk''. \tag{3}$$

Aus dieser Gleichung kann für die abklingende turbulente Bewegung die Form des Spektrums und die Art des Abklingens ermittelt werden[12].

Die statistische Theorie der Turbulenz geht also grundsätzlich von der Annahme aus, daß die Bewegung auch einer nicht reibenden Flüssigkeit „im allgemeinen" turbulent sei, denn die nicht reibende Flüssigkeit ist ein System von vielen Freiheitsgraden. Die laminare Bewegung ist ein ebenso unwahrscheinlicher Spezialfall wie die geordnete Bewegung der Moleküle in einem Gas. Erst eine hinreichend große Viskosität begünstigt laminare Bewegungen, da sie bei kleinen Reynoldsschen Zahlen die Wirbelbildung unterdrückt, die Bewegung also wenigstens im Bereich der kleinen Wellenlängen glättet. Während bei den Stabilitätsuntersuchungen der laminaren Bewegungen die Reibung als die Kraft erschien, die diese Bewegungen labil macht und die Turbulenz erzeugt, erscheint jetzt die Reibung als die Kraft, die Wirbelungen unterdrückt und die Bewegungen laminar zu machen sucht.

Der Widerspruch zwischen diesen beiden Behauptungen ist nur scheinbar. Denn im ersten Fall handelt es sich nicht um einen Gleichgewichtszustand, sondern um die Geschwindigkeit, mit der ein nicht stabiler Vorgang in einen Gleichgewichtszustand übergeht (in der Sprache der Chemie um eine Reaktionsgeschwindigkeit), im zweiten Fall wird nach der Gleichgewichtsver-

[11] W. Heisenberg, Z. Physik **124**, 628 [1948].
[12] W. Heisenberg, Proc. Roy. Soc. [London] Ser. A, im Erscheinen.

teilung selbst gefragt. In der nicht reibenden Flüssigkeit ist zwar die laminare Bewegung ein unwahrscheinlicher Spezialfall, aber die Geschwindigkeit des Übergangs in den turbulenten Gleichgewichtszustand ist zunächst verschwindend klein; sie würde von Null verschieden nur, wenn etwa schon vorher viele kleine Wirbel vorhanden sind, d. h. wenn durch Turbulenz im kleinen eine turbulente Reibung hervorgerufen wird. Aus dieser letzten Überlegung geht hervor, daß es im Grunde nie vorkommen kann, daß ein Strömungszustand, bei dem die Flüssigkeit an den Wänden haftet und der ohne Reibung stabil ist, bei Einführung der Reibung labil wird. Denn die Reibung ließe sich ebensogut durch eine von kleinen Wirbeln hervorgerufene turbulente Reibung ersetzen; nur kann man diese Art der Labilität nicht mit der üblichen Methode der kleinen Schwingungen behandeln. Denn die Zeit, in der eine Schwingung anwächst, hängt dann von der Schwingungsamplitude der kleinen Wirbel ab und würde bei verschwindender Amplitude unendlich groß. Zu ihrer Berechnung müßte man also auch nichtlineare Glieder in den Schwingungen mitberücksichtigen, was freilich die relative mathematische Einfachheit der Methode der kleinen Schwingungen zerstören würde. Man erkennt aus dieser Überlegung, daß die Methode der kleinen Schwingungen bei hydrodynamischen Stabilitätsfragen grundsätzlich nicht ausreicht, was zum Teil die physikalisch etwas widersprechenden Ergebnisse früherer Untersuchungen erklären mag.

Im Gleichgewicht selbst dagegen unterdrückt die Reibung die kleinen Wirbel und glättet die Bewegung; sie verschiebt das Gleichgewicht zu Ungunsten der kleinen turbulenten Bewegungen. Wenn man die voll ausgebildete turbulente Strömung in dieser Weise als Gleichgewichtsvorgang ansieht und etwa mit der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung vergleicht, so muß man allerdings darauf achten, daß dieser Vergleich in einem Punkte nicht zutreffen kann. Während sich das thermodynamische Gleichgewicht stets von selbst in einem abgeschlossenen System einstellt, wenn man nur hinreichend lange wartet, benötigt die turbulente Gleichgewichtsströmung eine dauernde Energiezufuhr, da ja durch Reibung auch dauernd Energie in Wärme verwandelt und abgeführt wird. Daher zerfällt das Spektrum der turbulenten Bewegung meist in drei physikalisch unterschiedene Wellenlängenbereiche. Die Energie wird im allgemeinen im Gebiet der langen Wellen auf die Flüssigkeit übertragen, etwa durch einen relativ zur Flüssigkeit bewegten Körper; in diesem langwelligen Gebiet herrscht natürlich kein Gleichgewicht, die Form und Häufigkeit der entstehenden Wirbel hängt von dem speziellen Vorgang ab, der die Energie überträgt, die Berechnung der Strömung ist sicher kein rein statistisches Problem. Dann kommt ein Bereich kleinerer Wirbel, die von den größeren erzeugt werden und die ihre Energie wieder in kleinere Wirbel verteilen; in diesem Bereich kann der Idealfall des von K o l m o g o r o f f [7], O n s a g e r [8] und v. W e i z s ä c k e r [9] studierten statistischen Gleichgewichts in guter Näherung verwirklicht sein $[F(k) \sim k^{-5/3}]$. Nach kurzen Wellenlängen schließt sich endlich ein dritter Gleichgewichtsbereich an [11], in dem die Energie der Wirbel zum größten Teil durch die Reibungswärme verzehrt wird $[F(k) \sim k^{-7}]$.

In vielen Fällen wird es natürlich auch nicht zur Ausbildung des Gleichgewichts kommen, oft wird sich an den ersten Bereich unmittelbar der dritte anschließen, in dem die Energie in Wärme verwandelt wird, ohne daß sie vorher in erheblichem Ausmaß auf alle Freiheitsgrade verteilt würde. Die Verteilung der Energie auf die anderen Wellenlängenbereiche geschieht ja stets durch die nichtlinearen, die Trägheit darstellenden Glieder der hydrodynamischen Differentialgleichungen; die Geschwindigkeiten müssen also einen gewissen Mindestbetrag erreichen, damit die Trägheitsglieder überhaupt eine erhebliche Rolle spielen und die Energie in andere Wellenlängenbereiche übertragen können. Die mathematische Behandlung der Zwischenfälle turbulenter Bewegung, bei denen es noch nicht zur Ausbildung des richtigen Gleichgewichts kommt, ist natürlich besonders kompliziert, ähnlich wie in der kinetischen Gastheorie. Nur die beiden Grenzfälle der streng geordneten (laminaren) und der völlig ungeordneten (statistisch turbulenten) Strömung können einfach mathematisch beschrieben werden. Daß die turbulente Bewegung die Regel, die laminare die Ausnahme ist, folgt einfach aus der Tatsache, daß eine Flüssigkeit sehr viele Freiheitsgrade besitzt.